Chapitre 4 : Variables aléatoires

I) Définitions de base

Expérience (ou épreuve) aléatoire *:* c'est un ensemble de conditions précises caractérisant un processus à la suite duquel tel ou tel événement est réalisé ou non. C'est donc une expérience qui comporte plusieurs événements possibles, et qui forment ensemble l'univers Ω.

Variable aléatoire *:* c'est une fonction de Ω dans $\Re$.
X est une « variable » car il peut prendre plusieurs valeurs différentes et est « « aléatoire » car la venue de chaque valeur est liée au hasard.
Dans les jeux de hasard, les variables aléatoires associent un gain à chaque éventualité (résultat du lancer d'un ou plusieurs dés, d'un tirage à pile ou face, d'une roulette, …)

Loi de probabilité *:* chaque valeur de X peut être associée à une probabilité selon une loi que l'on appelle loi de probabilité de X. Cette loi comprend donc les différentes valeurs de X ainsi que les probabilités associées.

Exemple 1 :
On jette un dé de 6 faces et on note le chiffre qui sort.
La loi de probabilité de X est :

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\forall x_i \in \Omega \quad P(X=x_i) = 1/6$

Exemple 2 :
On jette un dé à 6 faces. Si le dé fait 5 ou 6, on gagne 1 €. Si l'on fait un 4, on ne gagne rien du tout. Si l'on fait 1, 2 ou 3, on perd -2 €.
La loi de probabilité de X est :

Valeurs de X	- 2	0	1
Probabilités	1/2	1/6	1/3

II) Caractéristiques et propriétés des lois de variables aléatoires discrètes

1) Rappel sur les différents types de variables

On distingue les variables qualitatives et les variables quantitatives :

<table>
<tr><th rowspan="3">Variable qualitative :
On ne peut pas calculer de moyenne.
Exemple : la couleur des yeux des étudiants (0 marron, 1 bleu, 2 vert, 3 autre)</th><th colspan="2">Variable quantitative :</th></tr>
<tr><td colspan="2">On peut calculer une moyenne.
Exemple : le salaire, la taille, le poids, le nombre de frères et sœurs, etc.</td></tr>
<tr><td>Variable discrète :
Elle prend des valeurs isolées.
Exemple : le nombre de frères et sœurs, le nombre de voitures, etc.</td><td>Variable continue :
Elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle donné.
Exemple : le poids, la taille, le salaire</td></tr>
</table>

2) Représentation graphique

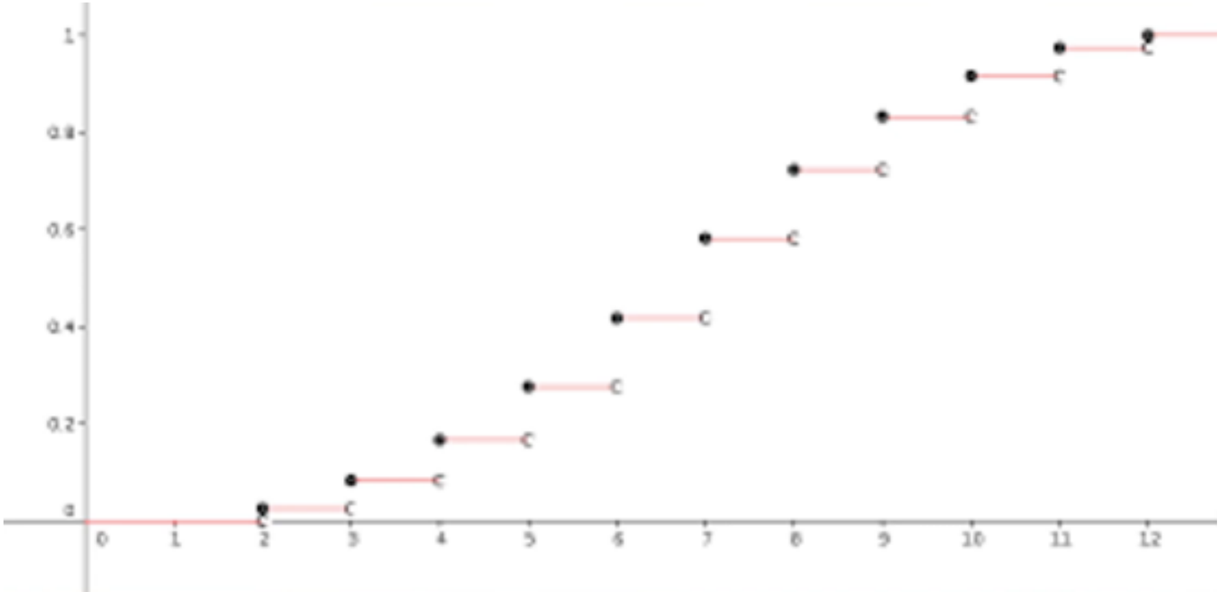
On peut représenter graphiquement les lois de probabilité : pour les variables discrètes, on fait un diagramme en bâton (histogramme). Avec les différentes valeurs prises par X en abscisse et les probabilités associées en ordonnée.

Mode = valeur prise par X associée à la probabilité la plus grande. (7)

Lorsque la loi de X ne possède qu'un seul mode, elle est unimodale. Lorsqu'elle en possède deux, elle est bimodale…

Variable de répartition = on peut également représenter la fonction de répartition F d'une loi de probabilité. C'est une fonction croissante en escalier pour les variables discrètes. La fonction de répartition est la fonction F telle que F : $\mathbb{R} \rightarrow [O,1]$

$x \rightarrow F(x) = \wp(X \leq x)$



3) <u>Notion d'espérance et de variance</u>

Définition de l'espérance *:* elle représente initialement le gain qu'un joueur est « en droit » d'attendre dans un jeu de hasard s'il joue un très grand nombre de fois.

Une variable aléatoire est dite **centrée** si son espérance est nulle.

Lorsque E(X) = 0 le jeu est dit équitable *(on a autant de chances de gagner que de perdre)*.

Formule : Si X est une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2\ldots, x_n\}$ alors l'espérance de X vaut : $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$

Remarque = si X est la VA associée au gain, alors E(X) désigne le gain moyen lorsque l'n jour un très grand nombre de fois.

Remarque = l'éspérance est la moyenne des valeurs prises par la variable X pondérée par les probabilités P(X=x).

Remarque = si la VA est comprise entre deux réels a et b, alors mon espérance sera aussi comprise entre a et b.

Définition de la variance *:* elle représente la dispersion de la loi de probabilité (fluctuation autour de l'espérance). Elle se calcule par la moyenne des carrés des écarts à une tendance centrale (ici l'espérance). Sa racine carrée est l'écart-type.

Une variable aléatoire est dite réduite si sa variance est nulle.

Formule *:* Si X est une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2 \ldots, x_n\}$ alors la variance de X vaut : $V(x) = \sum_{i=1}^{m} [x_i - E(x)]^2 . P(x = x_i)$

Remarque = la variance et l'écart au carré moyen entre les valeurs prises par la VA X et l'espérance de X pondérée par une probabilité P(X=x)

Exemple :

On jette un dé à 6 faces. Si le dé fait 5 ou 6, on gagne 1 €. Si l'on fait un 4, on ne gagne rien du tout. Si l'on fait 1, 2 ou 3, on perd -2 €.

Calculez la variance et l'espérance de ce jeu.

Valeurs de X	- 2	0	1
Probabilités	1/2	1/6	1/3

$$E(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i . P(x = x_i)$$

E(X) = (-2) . (1/2) + 0 . (1/6) + 1 . (1/3) = - 2/3

$$V(x) = \sum_{i=1}^{m} [x_i - E(x)]^2 . P(x = x_i)$$

V(X) = [-2+(2/3)]²(1/2)
+ [0+(2/3)]²(1/6)
+ [1+(2/3)]²(1/3)
= 1,8888...

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1{,}888} \approx 1{,}374$$

<u>Propriétés importantes de l'espérance et de la variance :</u>

- $E(a.X+b) = a.E(X) + b$
- $V(a.X+b) = a^2.V(X)$
- $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$: formule de Koënig-Huyghens

➢ Application K-H

Valeurs de X	- 2	0	1
Probabilités	1/2	1/6	1/3

$$V(X) = (-2)^2(1/2) + 0^2(1/6) + 1^2(1/3) - (-2/3)^2 = 1{,}8888...$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

<u>EXECICES D'APPLICATION</u>

Exercice 1 :

Une variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0, 1 ou 2.
Déterminez sa loi de probabilité sachant que E(X) = 1 et V(X) = ¼.

xi	0	1	2
P(X=xi)	P(X=0) = ?	P(X=1) = ?	P(X=2) = ?

1) $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$
2) $E(X) = 0.P(X=0) + 1.P(X=1) + 2.P(X=2) = P(X=1) + 2.P(X=2) = 1$
3) $E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2 = (1/4) + 1^2$
   $E(X^2) = 0^2.P(X=0) + 1^2.\ P(X=1) + 2^2.P(X=2) = (¼) + 1^2$
   $E(X^2) = P(X=1) + 4.P(X=2) = 5/4$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1 \\ P(X=1) + 2.P(X=2) = 1 \\ P(X=1) + 4.P(X=2) = 5/4 \end{array} \right.$$

{2} $P(X=1) = 1 - 2.P(X=2)$

{3} $1 - 2.P(X=2) + 4.P(X=2) = 5/4 \Longleftrightarrow 2.P(X=2) = 5/4 - 1$
$\Longleftrightarrow P(X=2) = 1/8$

{2} $P(X=1) = 1 - 2.(1/8) \Longleftrightarrow P(X=1) = 3/4$

{1} $P(X=0) = 1 - 3/4 - 1/8 \Longleftrightarrow P(X=0) = 1/8$

La loi de probabilité de X est donc :

Valeurs de X	0	1	2
Probabilités	1/8	3/4	1/8

Exercice 2 :

Dans une classe de TD, les étudiants ont réalisé des travaux de groupe. Les notes st les suivantes :

Groupe	A	B	C	D
Note	10	11	13	17

Vous n'étiez pas la ce jour-là mais votre groupe si. Vous aurez donc sa note. Vous ne connaissez pas le nom de votre groupe, mais estimez que le travail n'était pas excellent. Et donc il y a 50% de chances que ce soit le groupe A, 25% de chances que ce soit le groupe B, 15% de chances que ce soit le groupe C et 10% que e soit le groupe D. Soit X la variable aléatoire égale à votre note.

a) Déterminez E(X), V(X) et son écart-type.
b) Le chargé de TD décide d'augmenter une note de 1 point. Quel impact cela aura-t-il se la variance, l'espérance et l'écart-type ?
c) Il change d'avis et préfère augmenter une note de 10%. Quel impact cela aura-t-il sur E(X), V(X) et l'écart-type ?

a)

Groupe	A	B	C	D
x_i	10	11	13	17
$p(X=x_i)$	0,5	0,25	0,15	0,1

$E(X) = 10x0,5 + 11x0,25 + 13x0,15 + 17x0,10 = 11,4$

$E(X^2) = 10^2x0,5 + 11^2x0,25 + 13^2x0,15 + 17^2x0,10 = 134,5$

$V(X) = E(X^2) – [E(X)]^2 = 134,5 – 11,4^2 = 4,54$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4,54} \approx 2,13$

b)

$E(a.X+b) = a.E(X) + b$ ➔ $E(X+1) = E(X) + 1 = 11,4 + 1 = 12,4$

$V(a.X+b) = a^2.V(X)$ ➔ $V(X+1) = V(X) = 4,54$

$\sigma(X+1) = \sigma(X) = 2,13$

c)

$E(a.X+b) = a.E(X) + b$ ➔ $E(1,1.X) = 1,1.E(X) = 11,4 \text{ x } 1,1 = 12,54$

$V(a.X+b) = a^2.V(X)$ ➔ $V(1,1.X) = 1,1^2.V(X) = 4,54 \text{ x } 1,1^2 = 5,4934$

$\sigma(a.X) = a.\sigma(X)$ ➔ $\sigma(1,1.X) = 2,13 \text{ x } 1,1 \approx 2,343$

Exercice 3 :

Vous jouez à la roulette. Ce jeu comprend 37 cases numérotées de 0 à 36. Il y en a 18 rouges, 18 noires et 1 verte (la case n°0). Si vous misez sur une des deux couleurs, vous gagnez 2 fois votre mise si la couleur sort. Si vous jouez un numéro alors vous gagnez 36 fois la mise si le numéro sort. Enfin, toute mise sur le 0 est interdite. Cette roulette n'est pas truquée.

a) Déterminez la loi puis calculez l'espérance et l'écart type du gain X_C si vous misez a euros sur 1 couleur.
b) Déterminez la loi puis calculer l'espérance et l'écart-type du gain X_n si vous misez a euros sur 1 numéro.

a)

$Xc(\Omega) = \{-a ; a\}$

Xc	a	-a
P(Xc=xi)	18/37	19/37

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X=x_i) \rightarrow a.\frac{18}{37} - a.\frac{19}{37} = -\frac{a}{37}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$a^2\frac{18}{37} + (-a)^2\frac{19}{37} = \frac{37 \cdot a^2}{37} = a^2 \rightarrow a^2 - \frac{a^2}{37^2} = \frac{1368 \cdot a^2}{1369}$$

et $\sigma(Xc) = \sqrt{V(Xc)} = \dfrac{6.a\sqrt{38}}{37}$

b)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X=x_i) \rightarrow 35.a.\frac{1}{37} - a.\frac{36}{37} = -\frac{a}{37}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$1225.a^2\frac{1}{37} + (-a)^2\frac{36}{37} = \frac{1261 \cdot a^2}{37} \rightarrow \frac{1261 \cdot a^2}{37} - \frac{a^2}{37^2} = \frac{46656 \cdot a^2}{1369}$$

et $\sigma(Xn) = \sqrt{V(Xn)} = \dfrac{216.a}{37}$

Interprétation : exemple pour a = 10 euros

Couleurs	Numéros
$E(X_c) = -\dfrac{a}{37}$	$E(X_n) = -\dfrac{a}{37}$
$\sigma(X_c) = \dfrac{6a\sqrt{38}}{37}$	$\sigma(X_n) = \dfrac{216a}{37}$
E(Xc) = - 0,27 euros	E(Xn) = - 0,27 euros
σ(Xc) = 9,99 euros	σ(Xn) = 58,38 euros