Chapitre 3 : Probabilités conditionnelles

Introduction :

Une probabilité conditionnelle est une probabilité simple qui a été affinée par l'apport d'informations supplémentaires.

EXEMPLE : Probabilité simple : probabilité de réussite en première année = 0,4

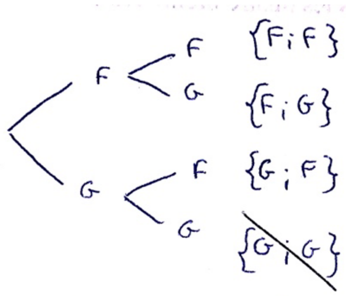
Probabilité conditionnelle : probabilité de réussite d'un étudiant qui travaille et prépare ses exercices = 0,70

EXERCICE D'INTRODUCTION :

Je me rends chez un ancien copain de collège, je sais qu'il a maintenant deux enfants, je ne sais pas s'il s'agit de garçons ou de filles, (mais ce ne sont ni des jumeaux ni des jumelles). On suppose que la probabilité d'avoir un garçon ou une fille est la même. Je sonne à sa porte et une petite fille vient m'ouvrir. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

A *« l'autre enfant est un garçon »*

B *« la famille comporte au moins une fille »*



$= \frac{2}{3}$

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

A : " L'autre enfant est un garçon "

B : " La famille comprend au moins 1 fille "

$P(A) = \frac{1}{2} = 0,5$

$P(B) = \frac{3}{4} = 0,75$

$P(A \cap B) = 0,5$

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,5}{0,75} = \frac{2}{3}}$$

$$\text{P de A sachant B} = P(A \mid B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Cas particuliers à retenir :

- Si A et B sont incompatibles alors $P_B(A) = 0$
- Si B entraîne A ($A \subset B$) alors $P_B(A) = 1$
- $P_B(A) = 1$
- $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$
- $P_C(A \cup B) = P_C(A) + P_C(B) - P_C(A \cap B)$
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

EXERCES D'APPLICATION :

Exercice 1 :

Vous cherchez votre portefeuille qui a une probabilité p de se trouver dans votre veste. Votre veste comporte 5 poches que vous utilisez indifféremment. Quelle est la probabilité que le portefeuille se trouve dans la 5eme poche sachant qu'il n'était pas dans les quatre premières ?

A *« le portefeuille est dans la 5ème poche »*

B *« le portefeuille n'est pas dans les quatre premières poches »*

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ici : $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{5} \times p$

$P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{5} \times p + 1 - p$

$$P_B(A) = \frac{0{,}2p}{0{,}2p + 1 - p} = \frac{p}{5 - 4p}$$

Exercice 2 :

Tom et Bob jouent au poker avec un jeu de 32 cartes. Ils se distribuent 5 cartes chacun.

1) Quelle est la probabilité pour que Tom ait au moins un As ?
2) Vous savez que Bob a exactement un As entre les mains. Calculer de nouveau la probabilité que Tom ait au moins un As.

1) A = "Tom a au ⊖ 1 as"

$\bar{A}$ = "Tom n'a aucun as"

$P(\bar{A}) = \dfrac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}}$ $\qquad P(A) = 1 - P(\bar{A}) \simeq 0,512$

2) B = "Bob a 1 as exactement"

$P_B(\bar{A}) = \dfrac{\binom{24}{5}}{\binom{27}{5}}$ ← 32 - 5 - 3 as $\qquad P_B(A) = 1 - P_B(\bar{A}) \simeq 0,473$

Exercice 3 :

A un examen oral, on laisse se répartir au hasard 10 étudiants sur 6 jurys sachant que le jury n°1 n'admet plus personne.

Calculez la probabilité que les jurys n°2 ou 3 ne reçoivent personne.

Ji = "le jury n° i ne reçoit personne"

$$P_{J_1}(J_2 \cup J_3) = P_{J_1}(J_2) + P_{J_1}(J_3) - P_{J_1}(J_2 \cap J_3)$$

$$= \frac{4^{10}}{5^{10}} + \frac{4^{10}}{5^{10}} - \frac{3^{10}}{5^{10}} \simeq 0,21$$

I) Notion d'indépendance

1) Indépendance simple

Définition : 2 événements sont indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'autre. A et B sont indépendants si et seulement $P_B(A) = P(A)$ ou encore $P_A(B) = P(B)$ ou encore $P(A \cap B) = P(A)*P(B)$.

La réciproque est vraie : si $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$ ou $P(A \cap B) = P(A)*P(B)$ alors les deux événements A et B sont indépendants.

Par ailleurs, si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ le sont aussi, et $\bar{A}$ et B le sont aussi.

Je lance un dé deux fois de suite et je note les événements suivants :

A « le premier lancer donne 6 » > P(A) = 1/6

B » le deuxième lancer donne 1 » > P(B) = 1/6

- A et B sont indépendants

C « la somme des deux lancers est égale à 5 »

- Ici A et C sont dépendants.

EXERCICE D'APPLICATION :

Une discothèque réalise une étude sur 100 clients. Elle cherche notamment à connaître l'âge et le statut marital de ces clients. D'après le tableau suivant, peut-on dire que le statut marital est indépendant de l'âge ?

	Célibataire	Marié	Σ
-30 ans	50	25	75
+30 ans	10	15	25
Σ	60	40	100

A = « -30 ans » A = « être célibataire »

$\bar{A}$ = « + 30 ans » $\bar{B}$ = « être marié »

$P(A) = \frac{75}{100} = 0{,}75$ $P(B) = \frac{60}{100} = 0{,}6$

$P(A) \times P(B) = 0{,}75 \times 0{,}6 = 0{,}45$ $P(A \cap B) = \frac{50}{100} = 0{,}5$

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B) \rightarrow$ A et B sont dépendants

$P_B(A) = \frac{50}{60}$ $P_A(B) = \frac{50}{70}$

$P_B(\bar{A}) = \frac{10}{60}$ $P_A(\bar{B}) = \frac{25}{75}$

$P_{\bar{B}}(A) = \frac{25}{40}$ $P_{\bar{A}}(B) = \frac{10}{25}$

$P_{\bar{B}}(A) = \frac{15}{40}$ $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{15}{25}$

2) Indépendance mutuelle

Définition : n événements sont mutuellement indépendants si la réalisation d'une partie de ces événements, quels qu'ils soient, ne modifie pas la réalisation des autres. Les événements A_1, A_2, … , A_n sont indépendants si et seulement si :

$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)*P(A_2)* \ldots .P(A_n)$

L'indépendance mutuelle de *n* événements entraîne leur indépendance deux à deux. Par contre des événements indépendants 2 à 2 peuvent être mutuellement dépendants.

EXERCICE D'APPLICATION :

Exercice 1 :

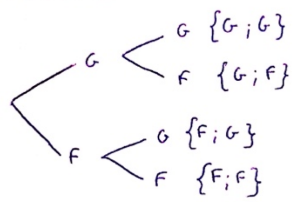
Je vais voir un autre copain de collège qui a eu deux enfants dont je ne connais pas le sexe.

Soit A « il a eu deux enfants de sexe différent »

B « l'ainé est un garçon »

C « le deuxième est une fille »

Les évènements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ?



$P(A) = \frac{2}{4} = 0,5$

$P(B) = \frac{2}{4} = 0,5$

$P(C) = \frac{2}{4} = 0,5$

$P(A) \times P(B) \times P(C) = 0,5 \times 0,5 \times 0,5$
$= 0,125$

$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} = 0,25$

$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$

$\Rightarrow$ A, B et C sont mutuellement dépendant

$P(A \cap B) = 0,25$
$P(A \cap C) = 0,25$
$P(B \cap C) = 0,25$

$P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$
$P(A) \times P(C) = 0,25$
$P(B \cap C) = 0,25$

Exercice 2:

Sur une chaine de production mal réglée défilent des produits sains et des produits défectueux dans des proportions équivalentes. On prélève n produits sur cette chaine de prod que l'on place chacun sur un chariot. On a donc n chariots alignés destiné au service qualité.

Soit A « on a sélectionné au moins 2 produits sains »

B « on a sélectionné à la fois des produits sains et des produits défectueux »

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

$\text{Card } \Omega = 2^n$

$\bar{A}$: " on a selectionné 0 ou 1 produit sain "

$$P(\bar{A}) = \frac{1+n}{2^n}$$

$$P(A) = 1 - \frac{1+n}{2^n} = \frac{2^n - n - 1}{2^n}$$

$\bar{B}$: " On a selectionné que des produits sains ou que des produits défectueux "

$$P(\bar{B}) = \frac{1+1}{2^n} = \frac{2}{2^n}$$

$$P(B) = 1 - \frac{2}{2^n} = \frac{2^n - 2}{2^n}$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$P(\bar{A} \cap B) =$ " 1 produit sain (exactement) "

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{n}{2^n}$$

$$P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B) = \frac{2^n - 2}{2^n} - \frac{n}{2^n} = \boxed{\frac{2^n - n - 2}{2^n}}$$

$$P(A) \times P(B) = \boxed{\frac{2^n - n - 1}{2^n} \times \frac{2^n - 2}{2^n}}$$

exemple :

- pour $n = 2$, A et B sont dépendants
- pour $n = 3$, A et B sont indépendants

II) Formule des probabilités composées

Formule des probabilités composées : soient $A_1, A_2, \dots, A_n$, *n* événements non nuls, on a :

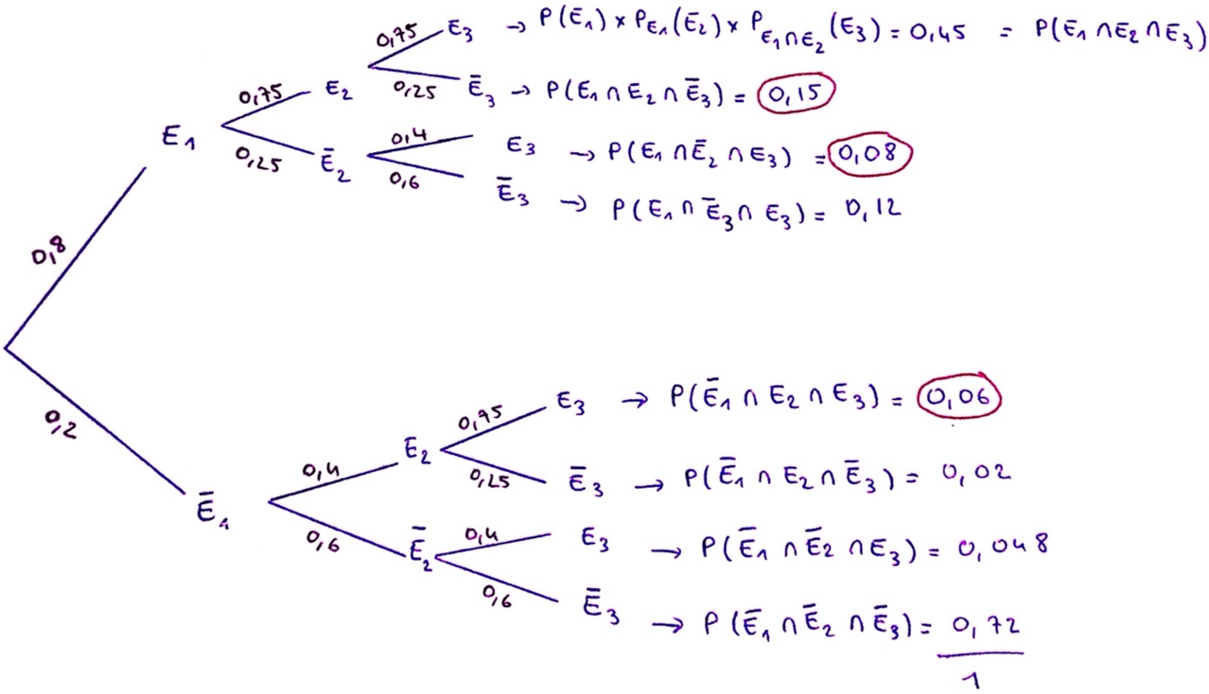
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) * P_{A_1}(A_2) * P_{A_1 \cap A_2}(A_3) * P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

EXERCICE D'APPLICATION :

Vous passez trois oraux d'affilée le même jour. Vous avez bien préparé le premier et estimez avoir 80% de chances de le réussir. Pour le 2^e et le 3^e oral, qui vous semblent plus aléatoire, vous pensez que cela dépendra de votre moral car vous êtes émotifs. Vous estimez ainsi réussir ces oraux avec une probabilité de 0,75 si celui d'avant s'est bien passé. Mais avec une probabilité de 40% si celui d'avant s'est mal passé.
Quelles sont vos chances de réussir au moins deux oraux ?

E_i : "réussir l'examen oral n°i"

$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3) + P(E_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3) + P(\bar{E}_1 \cap E_2 \cap E_3)$



III) **Formule des probabilités totales**

Formule des probabilités totales : soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ un système complet d'événements, avec $n \geq 1$, on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{i=n} P(Ai) \times P(B|Ai)$$

EXERCICE D’APPLICATION :

Vous décidez d’offrir un verre à une fille pour la séduire. Vous estimez qu’il y a 2 chances sur 3 pour qu’elle accepte. Si elle accepte, vous pensez être sûr à 80% de la séduire. Si par contre elle refuse, vous pensez qu’il n’y a plus qu’une chance sur dix d’y parvenir.

Quelles sont vos chances de la séduire ?

$P(S) = P(A) \times P_A(S) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(S)$

S = “elle est séduite”

A = “elle accepte le verre”

$P(A) = \frac{2}{3}$ $\qquad P_A(S) = 0{,}8$

$P(\bar{A}) = \frac{1}{3}$ $\qquad P_{\bar{A}}(S) = 0{,}1$

$\boxed{P(S) = \frac{2}{3} \times 0{,}1 = 0{,}5666\ldots}$

IV) **Formule de Bayes**

Formule de Bayes : soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un système complet d’événements, avec n et i ≥ 1, on a :

$$P(Ai|B) = \frac{P(B|Ai).P(Ai)}{\sum_{n=1}^{n=+\infty} P(B|An).P(An)}$$

B est une conséquence de tous les événements Ai.

On sait que quelque chose est arrivée et l’on cherche la probabilité que ça soit tel ou tel événement en soit la cause.

EXERCICE D’APPLICATION :

Une banque d’affaires prévoit l’éventuelle défaillance de ses entreprises clientes à l’aide d’un ratio économique. En-dessous d’un seuil critique, la banque estime que l’entreprise va faire faillite. Avec un peu de recul, on s’aperçoit que parmi les 14% d’entreprises qui ont réellement fait faillite, seul 85% avaient bien un ratio sous le seuil critique. Par contre, parmi les 86% d’entreprises tjrs existantes, 10% étaient à l’époque sous le seuil critique.

Quels types d'erreurs sont induits par cette méthode ? Estimez leur probabilité respective.

F = " l'entreprise fait faillite "

B = " le ration est bon "

$P_B(F) = ?$

$$= \frac{P_F(B) \times P(F)}{P_F(B) \times P(F) + P_{\bar{F}}(B) \times P(\bar{F})}$$

$$= \frac{0{,}15 \times 0{,}14}{0{,}15 \times 0{,}14 + 0{,}9 \times 0{,}86} \simeq 0{,}026$$

$P_{\bar{B}}(F) = ?$

$$= \frac{P_{\bar{F}}(\bar{B}) \times P(\bar{F})}{P_{\bar{F}}(\bar{B}) \times P(\bar{F}) + P_F(\bar{B}) \times P(F)}$$

$$= \frac{0{,}1 \times 0{,}86}{0{,}1 \times 0{,}86 + 0{,}85 \times 0{,}14}$$

$= 0{,}419$

$P(F) = 0{,}14$ $\qquad P(\bar{F}) = 0{,}86$

$P_F(\bar{B}) = 0{,}85$ $\qquad P_F(B) = 0{,}15$

$P_{\bar{F}}(\bar{B}) = 0{,}10$ $\qquad P_{\bar{F}}(B) = 0{,}9$

<u>Exercice 2 :</u>

Une épidémie touche 4 % des étudiants de votre amphi. Un test de dépistage existe mais n'est pas complètement fiable. Ce test vous déclare malade dans 98 % des cas si nous êtes effectivement malade, et vous déclare non malade dans 85 % des cas si vous n'êtes pas malade. Vous passez le test, et il vous déclare malade.
Quelle est la probabilité pour que vous le soyez vraiment ?

M = « être malade » D = « être déclaré malade »

On cherche donc : $P_D(M)$

$P(M) = 0{,}04$ $\qquad P(\bar{M}) = 0{,}96$

$P_M(D) = 0{,}98$ $\quad \rightarrow \quad P_M(\bar{D}) = 0{,}02$

$P_{\bar{M}}(\bar{D}) = 0{,}85$ $\qquad P_{\bar{M}}(D) = 0{,}15$

$$P_D(M) = \frac{P_M(D) . P(M)}{P_M(D) . P(M) + P_{\bar{M}}(D) . P(\bar{M})}$$

$$P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B) . P(A_i)}{\sum_{k=1}^{m} P_{A_k}(B) . P_{A_k}}$$

$$P_D(M) = \frac{0{,}98 \times 0{,}04}{0{,}98 \times 0{,}04 + 0{,}15 \times 0{,}96} \simeq 0{,}214$$

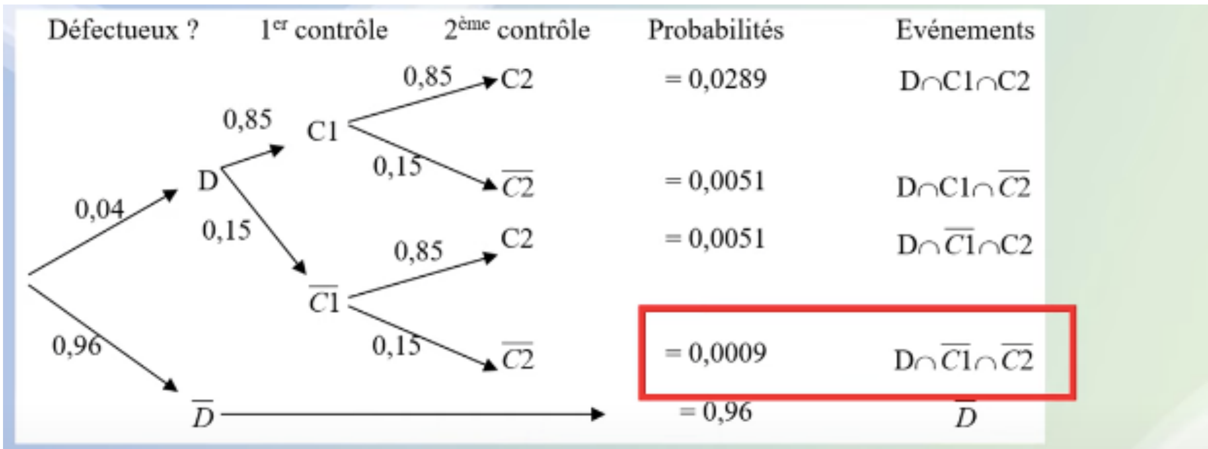
EXERCICE SUR LES PROBABILITES CONDITIONNELLES :

Les contrôle de qualité d'une chaine de production sont effectués par 2 personnes indépendantes. Chacune de ces 2 personnes repère 85 % des produits défectueux et note leur référence. On sait par ailleurs que 4 % des produits sont défectueux.
Calculez les probabilités suivantes :

a) Un produit est défectueux et n'est pas repéré
b) Un produit est défectueux et est repéré
c) Sur 100 produits qui défilent, aucun n'est défectueux
d) Sur 100 produits, aucun n'est déclaré défectueux
e) Sur 100 produits, le service qualité fait un « sans faute » (soit ils sont conformes, soit ils sont défectueux et repérés)
f) Sur 100 produits, au moins 1 produit défectueux échappe au contrôle qualité

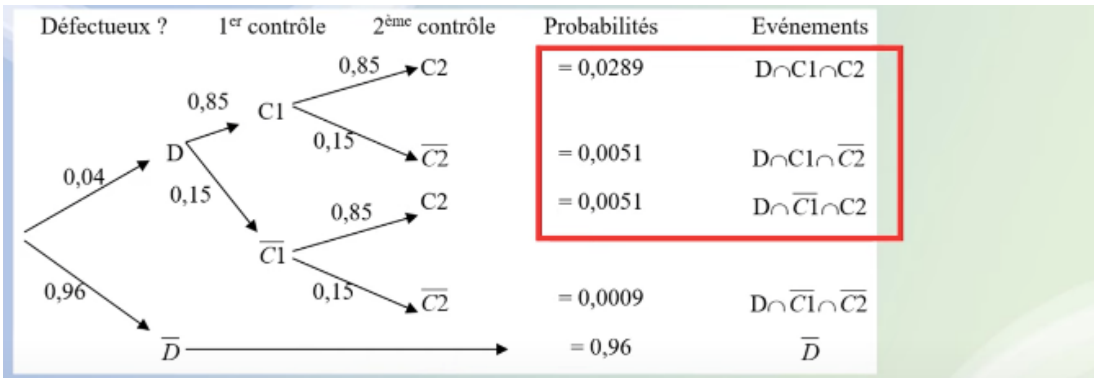
D : « Le produit est défectueux »
R_i : « Le contrôleur n°i a repéré le produit défectueux » (avec i = 1 ou 2)

a) Un produit est défectueux et n'est pas repéré



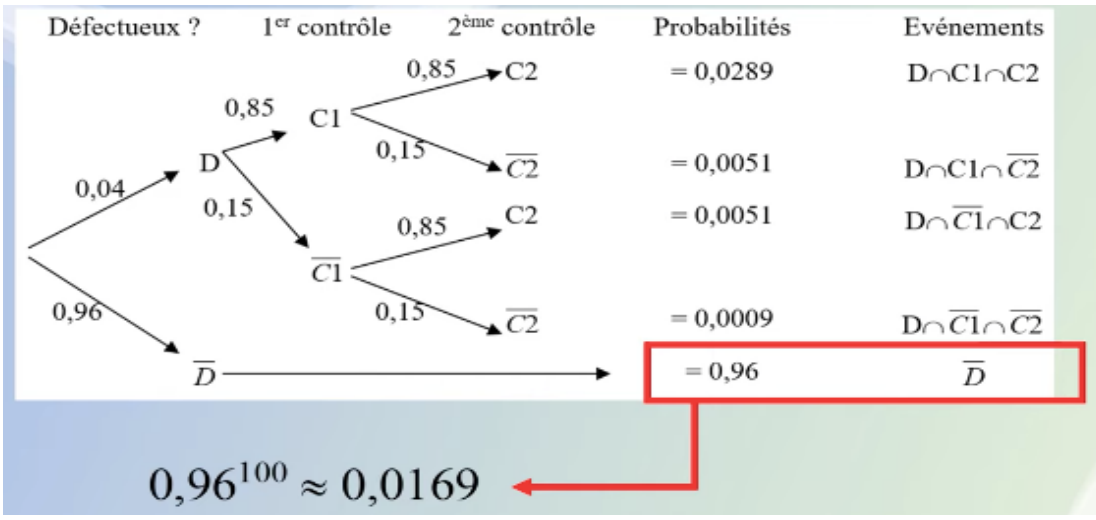
$$P(D\cap\overline{C1}\cap\overline{C2}) = P(D).\ P(\overline{C1} \mid D).\ P(\overline{C2} \mid D\cap\overline{C1}) = 0{,}04\ .\ 0{,}15\ .\ 0{,}15 = 0{,}0009$$

b) Un produit est défectueux et est repéré

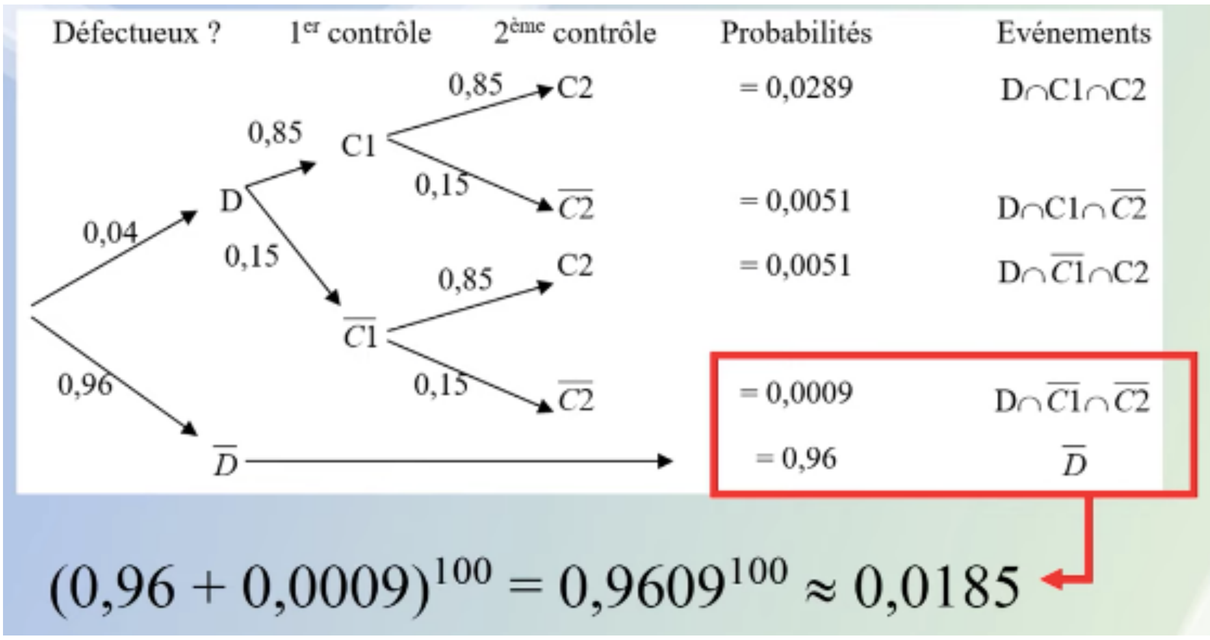


$$P(D\cap C1\cap C2) + P(D\cap C1\cap\overline{C2}) + D\cap\overline{C1}\cap C2 = 0{,}0289 + 0{,}0051 + 0{,}0051 = 0{,}0391$$

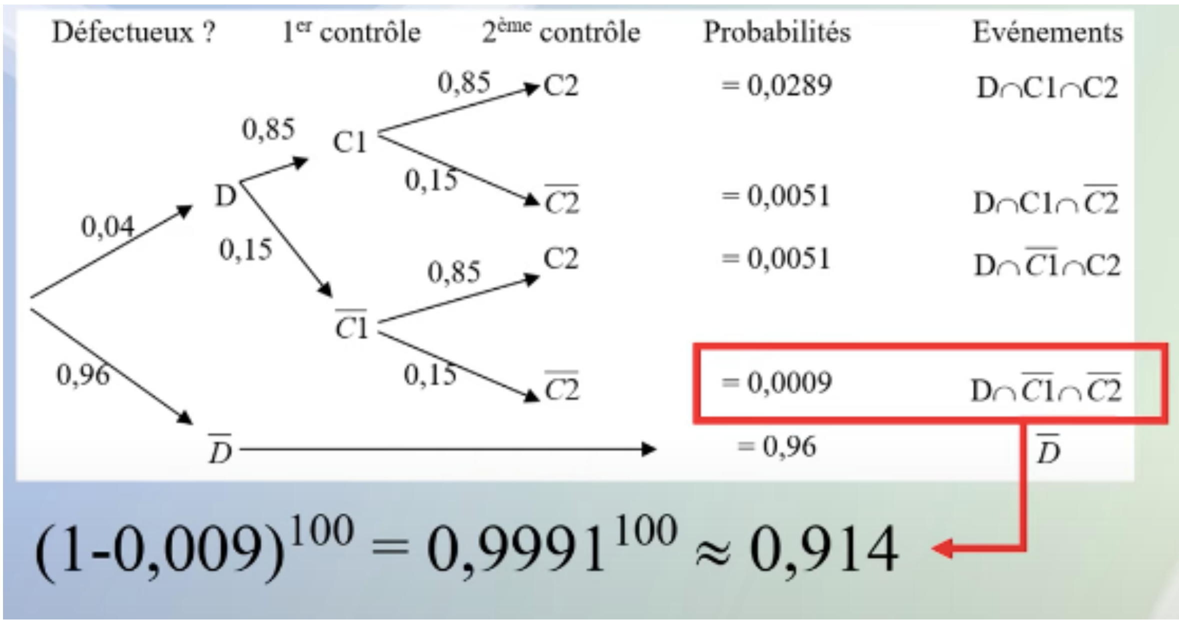
c) Sur 100 produits qui défilent, aucun n’est défectueux



d) Sur 100 produits, aucun n’est déclaré défectueux



e) Sur 100 produits, le service qualité fait un « sans faute » (soit ils sont conformes, soit ils sont défectueux et repérés)



f) Sur 100 produits, au moins 1 produit défectueux échappe au contrôle qualité