Chapitre 2 : Probabilités simples

I) Calcul d'une probabilité

Calcul d'une probabilité : dans le cas général, une probabilité est la limite, quand le nombre d'expériences n tend vers l'infini, du ratio nombre de fois où l'événement se réalise sur le nombre d'expériences n :

$$P(A)=\lim_{n\to+\infty}(\text{Nombre de fois où } A \text{ est réalisé} / n)$$

avec n = nombre d'expériences

II) Equiprobabilité : définition et conséquences

Définition de l'équiprobabilité : les différents événements élémentaires ont autant de chances les uns que les autres de se produire.

Dans ce cas-là, <u>et dans ce cas seulement</u>, on peut utiliser la formule :
P(A) = nbre de cas favorables à A / nbre de cas total (possibles)

<u>EXEMPLE :</u>

Je lance un dé à 6 faces.

- Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

On note P l'événement « obtenir un nombre paire »
On a 3 nombres paires sur les six nombres au total.
$P(p) = \frac{3}{6} = 0,5$

- Répondez à la même question sachant cette fois que le dé est truqué de telle manière que le numéro 6 sort deux fois plus souvent que n'importe quelle autre face.

P(6) = 2 x P(1) 2*P(2) + … +

Je reprends mon dé non truqué. Quelle est la proba P(A) qu'une des faces fixées n'apparaisse jamais au cours de n lancers ?
Premier lancer : $P(A) = \frac{5}{6}$
Deuxième lancer = $\frac{5}{6} * \frac{5}{6}$
Troisième lancer = $\frac{5}{6} * \frac{5}{6} * \frac{5}{6}$

N$^{\text{ième}}$ lancer = $\frac{5n}{6n}$

- Quelle est la proba P(B) que cette même face n'apparaisse jamais sur une infinité de lancers ?

$$P(B) = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = O$$

Mais dans tous les cas, qu'il y ait équiprobabilité ou non, une probabilité correspond à la fréquence moyenne d'apparition d'un événement, et c'est un nombre compris entre 0 et 1.

III) <u>Propriétés d'une probabilité</u>

On retrouve les différentes propriétés des cardinaux, appliquées aux probabilités :
a) P(∅) = 0

b) Si A et B sont <u>incompatibles</u> (A∩B = ∅), alors : P(A∪B) = P(A) + P(B)
On généralise d'ailleurs cette formule à n événements incompatibles 2 à 2 :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{k=n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{k=n} P(A_k)$$

c) P(A) = 1 – P($\overline{A}$) c'est très utile, on a très souvent recours à l'événement contraire !

d) Si A⊂B alors : P(B – A) = P(B) – P(A) avec P(B) ≥ P(A)

e) Si A et B sont 2 événements quelconques, alors : P(A∪B) = P(A) + P(B) – P(A∩B)
On généralise d'ailleurs cette formule à n événements quelconques à l'aide de la formule de Poincaré (ou formule du crible) :

$$P(A1 \cup A2 \cup \ldots \cup An) = \sum_{k=1}^{n} 1^{k-1} \sum_{1 \leq i1 \leq \ldots \leq ik \leq n} P(Ai1 \cap Ai2 \cap \ldots \cap Aik)$$

On remarque qu'il s'agit exactement de la formule de Poincaré vue précédemment, les cardinaux étant remplacés par de probabilités.

<u>EXERCICE D'APPLICATION</u>

<u>Exercice 1 :</u>
Dans une université on estime que la probabilité que l'extincteur automatique d'incendie tombe en panne est de 18%, que la proba que le système d'alarme tombe en panne est de 12% et que la proba que les deux soient simultanément en panne est de 5%.

Calculer les proba :
Au moins un des deux systèmes fonctionne
Que les deux systèmes fonctionnent

A *« l'extincteur automatique d'incendie est en panne »* donc P(A)=0,18
B *« le système d'alarme est en panne »* donc P(B) = 0,12
$P(A \cap B) = 0{,}05$
$P(\overline{A}) = 0{,}82$
$P(\overline{B}) = 0{,}88$
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}95$
$P(\overline{A}$ U $\overline{B}) = P(\overline{A}$ barre $\cap$ $\overline{B}$ barre$) = 0{,}95$
Réponse B :
$P(\overline{A} \cap \overline{B})$ = P(AUBbarre) = $P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \sqcap \overline{B}) = 0{,}82 + 0{,}88 - 0{,}95 = 0{,}75$
On a 75% de chances que les deux systèmes fonctionnent.

<u>Exercice 2 :</u>
Le jeu de passe dix consiste à jeter trois dés. On gagne si la somme des points est supérieure à 10. Le chevalier de Méré a constaté que l'on gagnait plus souvent avec 11 que 12 points. Cela ne lui semble pas logique, car il y six possibilités de faire 11 points et six possibilités de faire 12 points.
Le chevalier de Méré écrivit donc à Pascal pour lui faire part de ce problème. Qu'auriez-vous répondu à la place de Pascal ?

11 = {6 ;4 ;1} {6 ;3.2} {5 ;5 ;1} {5 ;4 ;2} {5 ;3 ;3} {4 ;4 ;3}
12 = {6 ;5 ;1} {6 ;4 ;2} {6 ;3 ;3} {5 ;5 ;2} {5 ;4 ;3} {4 ;4 ;4}
A chaque fois, nous avons 6 possibilités de faire les combinaisons à 3 chiffres, nous avons 3 possibilités de faire les combinaisons à 2 chiffres, et nous avons une possibilité de faire les combinaisons à 1 chiffre.

Possibilités avec 3 dés = $Card(\Omega) = 6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$ poss
P(11) = 27/216 = 0,125
P(12) = 25/216 = 0,116
Réponse : Tu te trompes, Méré, car tu ne distingues pas les dés, il y a plus de chances de faire {5 ;4 ;3} que {4 ;4 ;4}. Les différents événements tels qu'ils sont présentés ne sont pas équiprobables. Il y en fait 27 manières de faire 11, contre 25 manières seulement de faire 12.

<u>Exercice 3 :</u>
Une boite contient 7 jetons numérotés de 1 à 7. On en tire une poignée de 3.
Quelle est la probabilité que la somme des numéros tirés soit supérieure à la somme des numéros restants ?
$Card(\Omega)$ = manière de choisir 3 numéros parmi 7 sans tenir compte de l'ordre.
$= C^3_7 = 7\,! / 3\,!\,4\,! = 35$
Somme totale des 7 jetons : 1+2+3+4…+7 = 28

Cherchons quelles sont les sommes qui sont supérieures à 15 points ?
7+6+5 = 18
7+6+4= 17
7+6+3 = 17
7+6+2 = 15
7+5+4 = 16
7+5+3 = 15
6+5+4 = 15

P = 7/35 = 0,2

Exercice 4 :

Démontrer que dans un TD de 23 étudiants, il y a plus d'une chance sur deux pour que deux étudiants au moins aient leur anniversaire le même jour. Généraliser ensuite à n étudiants. Pour simplifier on ne prendra que des années de 365 jours.

A *« 2 étudiants au moins ont leur anniversaire le même jour »*
Card(Ω) = 365*365*365*…*365 = 365^{23}

$\overline{A}$ *« tous les étudiants ont leur anniversaire un jour différent »*
Card($\overline{A}$) = 365*364*363*…*343 = A^{23}_{365}
P($\overline{A}$) = $A^{23}_{365} / 365^{23}$
P(A) = 1 – P($\overline{A}$) = 1 – ($A^{23}_{365} / 365^{23}$) = 0,507

Pour n étudiants :
Si n > 365 => P(A) = 1
Si n inférieur ou égal => P(A) = 1 – ($A^{n}_{365} / 365^{n}$)

Exercice 5 :

Un portefeuille contient v vrais billet et f faux billets. On vide ce portefeuille en tirant au hasard chaque billet un par un et en notant V si c'est un vrai et F si c'est un faux. L'expérience aboutit donc à une liste du type VVFVVF…

1) Quelle est la proba de sortir un faux billet dès le premier tirage ?
2) Quelle est la proba de ne sortir un faux billet qu'au bout de n tirages ?
3) Quelle est la proba de sortir un deuxième faux billet au bout de n tirages ?
4) Généraliser au cas $k^{ème}$ faux billet.

1) $P(A) = \frac{f}{f+v}$

2) $$P(B) = \frac{\binom{f+v-n}{f-1}}{\binom{f+v}{f}}$$

3) $$\binom{n-1}{1} \times \binom{f+v-n}{f-2} = P(C) = \frac{\binom{n-1}{1} \times \binom{f+v-n}{f-2}}{\binom{f+v}{f}}$$

4) $$\binom{n-1}{k-1} \times \binom{f+v-n}{f-k} = P(D) = \frac{\binom{n-1}{k-1} \times \binom{f+v-n}{f-k}}{\binom{f+v}{f}}$$