Chapitre 5 : Lois discrètes classiques

I) Loi de Bernoulli

Définition *:* la loi de Bernoulli correspond à une situation où l'expérience aléatoire ne peut avoir que deux issues possibles *(situation d'alternative)* : le succès ou l'échec.

Codage :

1 = succès

0 = échec

Notation : $X \sim\rightarrow \beta(1,p)$

Exemple : On jette un dé pour faire 6. On pose X=1 si on fait 6 et X=0 si non. $X \sim\rightarrow \beta(1,\frac{1}{6})$

Propriétés et démonstration :

E(X) = Ap + 0q = p

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1^2\,p + 0^2q - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = p.q$

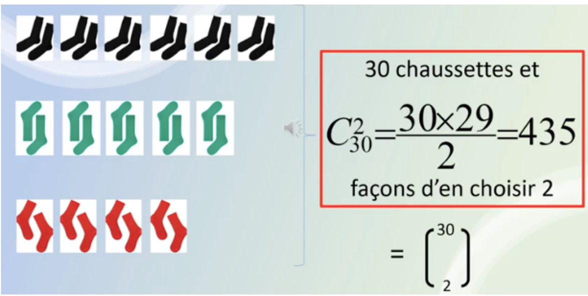
xi	1	0
P(X=xi)	p	q

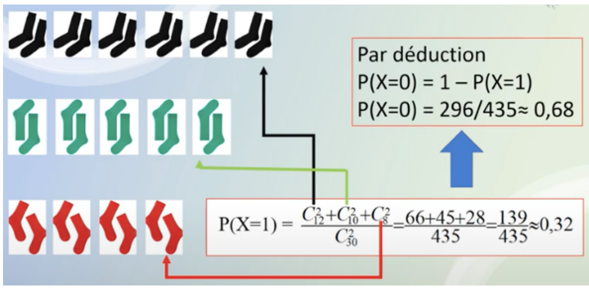
EXERCICE D'APPLICATION :

Vous avez dans un placard 6 paires de chaussettes noires, 5 paires de chaussette grises et 4 paires de chaussettes rouges. En dehors de la couleur, toutes ces chaussettes sont identiques. Vous êtes en noir et vous en choisissez deux au hasard.

Posons X=1 si les chaussettes st de la même couleur et X=0 sinon.

Déterminez la loi de X, E(X) et sont écart-type.





La loi de X est donc : $X \leadsto \beta(1, \frac{139}{435})$

L'espérance de X est donc : $E(X) = p = \frac{139}{435} \approx 0{,}32$

La variance de X est : $V(X) = pq = \frac{139}{435} \times \frac{296}{435} \approx 0{,}22$

L'écart type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 0{,}47$

II) <u>Loi binomiale</u>

Définition : la loi binomiale est une succession de *n* épreuves de Bernoulli indépendantes. En d'autres termes la loi binomiale correspond à une série de *n* épreuves identiques indépendantes chacune caractérisée par un succès ou un échec.

Codage :

Succès = 1

Échec = 0

Notation : $X \leadsto \beta(n,p)$

Propriétés : $P(X=k) = C_n^k . p^k . q^{n-k}$

$E(X) = n.p$

$V(X) = n.p.q$

Exercice 1 :

Vous lancez 5x de suite un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois le nombre 6 ?

Posons X la VA égale au nombre de 6 obtenus.

Chaque lancer est indépendant des autres. Pour chaque lancer, on a 1 une chance sur 6 de faire un 6.

Ici, n = 5 ; p = 1/6 ; q = 5/6 On note : $X \rightsquigarrow \beta(5, \frac{1}{6})$

$$P(X=3) = C_5^3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5\times4}{2} \times \frac{1}{216} \times \frac{25}{36} = \frac{500}{15552} \approx 0{,}03215$$

Exercice 2 :

Votre examen de fin d'année est un QCM, il y a 10 questions indépendantes et 4 choix à chaque fois (une seule réponse exacte). Vous n'avez rien appris et répondez tout au hasard.

a) Quelles sont vos chances d'avoir deux bonnes réponses exactement ?
b) Quelles sont vos chances d'avoir au moins deux bonnes réponses ?
c) Déterminez E(X) et V(X).

On pose X = la VA = au nombre de bonnes réponses. L'expérience est la répétition de 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendante de probabilité de succès 1/4. Donc X -> B(10 ; 1/4).

a)

$X \rightsquigarrow \beta(10, \frac{1}{4})$

n = 10 ; p = 1/4 ; q = 3/4

On cherche P(X≥2)

$P(X\geq2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$

b)

$$P(X=k) = C_n^k . p^k . q^{n-k}$$

$$P(X\geq2) = 1-\left[C_{10}^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10} + C_{10}^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^9\right] \approx 0{,}76$$

c)

$E(X) = np = 10 \times (1/4) = 2{,}5$

$V(X) = n.p.q = 10 \times 1/4 \times 3/4 = 30/16 = 1{,}875$

$\sigma(X) = \sqrt{1{,}875} \approx 1{,}369306394$

III) <u>Loi géométrique</u>

> *Définition :* on réalise une série d'épreuves identiques indépendantes dont l'issue est un succès ou un échec. On renouvelle autant de fois qu'il est nécessaire ces épreuves, jusqu'à l'obtention du premier succès. La variable aléatoire X correspond au rang d'apparition du premier succès. Elle suit une loi géométrique notée $\mathcal{G}(p)$.

Codage :

Succès = 1

Échec = 0

Notation *:* $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$

Propriétés : $P(X=k) = p.q^{k-1}$

$E(X) = \frac{1}{p}$

$V(X) = \frac{q}{p^2}$

Exemple : On lance une pièce de monnaie et on pose X = au rang d'apparition du premier « pile ». $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(\frac{1}{2})$

La probabilité que pile apparaisse au 1er lancer est de :

$P(X=1) = 0{,}5 \times 0{,}5^{1-1} = 0{,}5$

La probabilité que pile apparaisse au 2ème lancer est de :

$P(X=2) = 0{,}5 \times 0{,}5^{2-1} = 0{,}25$

La probabilité que pile apparaisse au 3ème lancer est de :

$P(X=3) = 0{,}5 \times 0{,}5^{3-1} = 0{,}125$

EXERCICE D'APPLICATION :

Vous faites du marketing téléphonique. Vous avez en moyenne 1 chance sur 5 en appel d'obtenir un rendez-vous. Votre responsable vous dit : « Si tu obtiens un rendez-vous en 3 appels ou moins, je t'offre une prime ».

En imaginant que chaque appel est indépendant, quelle est la probabilité pour que vous y parveniez ?

On voit que : $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(1/5)$ et on cherche $P(X \leq 3)$

$$P(X=k) = p.q^{k-1}$$

$$P(X \leq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0{,}2 \text{ x } 0{,}8^{1-1} + 0{,}2 \text{ x } 0{,}8^{2-1} + 0{,}2 \text{ x } 0{,}8^{3-1}$$

$$P(X \leq 3) = 0{,}2 + 0{,}16 + 0{,}128$$

$$P(X \leq 3) = 0{,}488$$

➔ Vous avez presque 1 chance sur 2 de décrocher la prime.

IV) Loi hypergéométrique

Définition *:* la loi hypergéométrique permet de calculer la probabilité pour que, sur un échantillon de *n* éléments sélectionnés simultanément parmi N sans remise, nous obtenions *k* éléments considérés comme des succès et *(n – k)* éléments considérés comme des échecs.

La loi hypergéométrique est en quelque sorte une loi binomiale pour laquelle les épreuves ne seraient pas indépendantes.

Remarque = on utilise la loi hypergéométrique pour des tirages réalisés simultanément.

p = proba de succès

q = 1-p la proba de l'échec

n = échantillon sélectionné de la population N

Notation *:*

Succès : p

Echec : q = 1-p

n l'échantillon sélectionné de la population N

Si X suit une loi hypergéométrique, on note : $X \rightsquigarrow \mathcal{H}(N, n, p)$

Propriétés *:* P(X=k) = $\frac{C_{N.p}^{k} \times C_{N.q}^{n-k}}{C_N^n}$

E(X) = *n.p*

V(X) = *n.p.q.*$\frac{N-n}{N-1}$

EXERCICES D'APPLICATION :

Exercice 1 :

On vous distribue 8 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité pour que vous ayez 5 cœurs et 3 cartes qui ne soient pas des cœurs ?

La distribution des cartes est simultanée, on est bien dans une situation de loi hypergéométrique. Appelons les cœurs les succès et les non-cœurs les échecs.

On a : $X \leadsto \mathcal{H}(N, n, p)$ avec N = 32 ; n = 8 ; p = 8/32 ; et q = 24/32

Le nombre de cas total est égal à C_{32}^{8} = 10 518 300 façons de choisir 8 cartes parmi 32.

Le nombre de cas favorables est égal à $C_8^5 \times C_{24}^3$ = 56 x 2024 = 113 344 façons de choisir 5 cœurs parmi les 8 cœurs et 3 autres cartes parmi les 24 cartes qui ne sont pas des cœurs.

La probabilité recherchée est donc : P(X=5) = $\frac{C_8^5 \times C_{24}^3}{C_{32}^8} = \frac{113344}{10518300} \approx 0{,}01$

Avec la formule : $P(X=5) = \frac{C_{N.p}^{k} \times C_{N.q}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{C_{32.\frac{8}{32}}^{5} \times C_{32.\frac{24}{32}}^{8-5}}{C_{32}^{8}} = \frac{C_8^5 \times C_{24}^3}{C_{32}^8}$

Exercice 2 :

Lors d'une tombola, N billets sont mis en vente, dont g sont gagnants. Vous en achetez n. Quelles sont vos chances de gagner ?

Les billets sont tirés simultanément, on est bien dans une situation de loi hypergéométrique de type $X \leadsto \mathcal{H}(N, n, \frac{g}{N})$

On peut donc appliquer la formule : $P(X=k) = \frac{C_{N.p}^{k} \times C_{N.q}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{C_g^k \times C_{N-g}^{n-k}}{C_N^n}$

On cherche : $P(X \neq 0)$

$$P(X=k) = \frac{C_{N.p}^{k} \times C_{N.q}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{C_g^k \times C_{N-g}^{n-k}}{C_N^n}$$

$$P(X \neq 0) = 1 - \frac{C_g^0 \times C_{N-g}^{n}}{C_N^n} = \frac{C_N^n - C_{N-g}^{n}}{C_N^n}$$

Exemple :

n	10
N	500
g	20

P(X≠0) ≈0,337688407

V) Loi de Poisson

Définition *:* la loi de Poisson est utilisée pour décrire le nombre d'occurrences d'un événement au cours d'un intervalle de temps ou d'espace bien défini OU dans certains cas, comme approximation de la loi binomiale.

Notation : $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Propriétés :

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 :

A un guichet SNCF donné, entre 8h et 9h en semaine, se présentent en moyenne 12 clients toutes les 10 minutes.

Le nombre de personnes se présentant au guichet à ces heures suit une loi de Poisson de paramètre λ.

a) Quelle est la probabilité pour que 5 personnes exactement arrivent en 10 minutes ?
b) Pour que 3 personnes ou plus arrivent en 2 minutes ?

a)

$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(12)$ et donc : $P(X=5) = e^{-12} \times \frac{12^5}{5!} \approx 0{,}01274$

b) La durée est divisée par 5 donc λ est divisé par 5.

$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(2{,}4)$ et on cherche $P(X \geq 3)$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X<3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]$

$$P(X \geq 3) = 1 - [e^{-2,4} \times \frac{2{,}4^0}{0!} + e^{-2,4} \times \frac{2{,}4^1}{1!} + e^{-2,4} \times \frac{2{,}4^2}{2!}] \approx 1 - (0{,}0907 + 0{,}2177 + 0{,}2613)$$

$$P(X \geq 3) \approx 0{,}43$$

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}$$

Remarque : $0! = 1$ et $2{,}4^0 = 1$

Autre utilisation de la loi de Poisson : elle peut également être utilisée comme approximation de la loi Binomiale.

- Lorsque n tend vers l'infini, que p tend vers 0 et que l'espérance mathématique reste constante, on a : $E(X) = n.p = \lambda$ et $\beta(n,p) \to \mathcal{P}(\lambda)$
- D'un point de vue pratique, lorsque le nombre n d'épreuves est grand (>50) que p est petit (<0,1) et que l'espérance np est comprise entre 0 et 10 ou lorsque $n \geq 200$ et que $10 \leq np \leq 20$ on peut aussi utiliser la loi de Poisson comme approximation de la loi binomiale

Exercice 2 : 0,03% des produits fabriqués dans une usine donnée sont défectueux. Vous commandez 12 000 de ces produits.

Quelle est la probabilité pour que seuls 2 produits ou moins soient défectueux ?

β(12 000 ; 0,0003) et on cherche P(X≤2)

P(X≤2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)

β(12 000 ; 0,0003) et on cherche P(X≤2)

→ $\mathcal{P}(3,6)$

P(X≤2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)

Résolution avec la loi binomiale :

$$P(X\leq 2) = C_{12000}^{0}\times 0{,}0003^{0}\times 0{,}9997^{120} + C_{12000}^{1}\times 0{,}0003^{1}\times 0{,}9997^{11999} + C_{12000}^{2}\times 0{,}0003^{2}\times 0{,}9997^{11998}$$

$\approx 0{,}30$

Résolution avec la loi de Poisson :

$$P(X\leq 2) = e^{-3,6}\times\frac{3{,}6^{0}}{0!} + e^{-3,6}\times\frac{3{,}6^{1}}{1!} + e^{-3,6}\times\frac{3{,}6^{2}}{2!} = 0{,}0273 + 0{,}0984 + 0{,}1771 \approx 0{,}30$$

VI) Synthèse récapitulative

Loi	P(X=k)	E(X)	V(X)
Loi de Bernoulli X ~→ β(1,p)	$P(X=1) = p$ $P(X=0) = q$	p	q
Loi binomiale X ~→ β(n,p)	$C_n^k\times p^k\times q^{n-k}$	$n.p$	$n.p.q$
Loi géométrique X ~→ $\mathcal{G}(p)$	$p.q^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Loi hypergéométrique X ~→ $\mathcal{H}(N, n, p)$	$\frac{C_{N.p}^{k}\times C_{N.q}^{n-k}}{C_N^n}$	$n.p$	$n.p.q.\frac{N-n}{N-1}$
Loi de Poisson X ~→ $\mathcal{P}(\lambda)$	$e^{-\lambda}\times\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ