***DEFINITION D'UNE PROBABILITE** : c'est l'évaluation du caractère aléatoire d'une hypothèse. Si une hypothèse est certaine, sa probabilité est de 1, si elle n'a au contraire aucune chance de se réaliser, sa probabilité est de 0. Ainsi une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1.*

Chapitre 1 : Dénombrement

I) Notions d'arrangement, de combinaisons et de permutations

Exercice d'introduction :

Une boîte contient 15 balles vertes, 10 balles jaunes et 5 balles rouges. On tire trois balles au hasard de l'urne. Combien cela fait-il de possibilités si les tirages sont :

1. **Successifs et avec remise ?**

Il y a 30 balles en tout dans l'urne. Si le tirage s'effectue avec remise, cela signifie que peu importe le nombre de tirages faits, il y a toujours 30 balles dans l'urne.
Cela fait donc : 30 x 30 x 30 = 30^3 = 27 000 possibilités de tirages.

Dans le cas général on dit que n^p est **un arrangement** de p éléments parmi n **avec répétition**.

Autre exemple, avec l'exemple du code de l'antivol d'un cadenas de vélo :
On a une combinaison à 3 chiffres. Dans chaque case, nous avons dix possibilités d'écriture de nombres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, et 9.
Cela fait donc 10 x 10 x 10 = 1 000 possibilités de combinaisons.

2. **Successifs et sans remise ?**

Il y a toujours 30 balles au départ dans l'urne. Comme le tirage s'effectue sans remise, cela signifie qu'au tirage suivant il y (n-1) balles, et on effectue trois tirages sans remise.
Cela fait donc 30 x 29 x 28 = 24 360 possibilités de tirages.

Dans le cas général on dit que A_n^p est **un arrangement** de p éléments parmi n **sans répétition**.
On a $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ pour tout n≥p.
Remarque : si n<p alors $A_n^p = 0$

Remarque : n ! signifie « factorielle ». C'est une « permutation », c'est-à-dire le nombre de façons qu'il y a de ranger des objets. En effet en probabilité l'ordre peut avoir une importance (tout comme il peut ne pas en avoir).

Exemple de permutation avec l'exemple des balles de l'urne :
$A^3{}_{30} = \frac{30\,!}{27\,!}$

$= \dfrac{30 \text{ x } 29 \text{ x } 28 \text{ x } 27 \text{ x } 26 \text{ x } \ldots}{27 \text{ x } 26 \text{ x } 25 \text{ x } \ldots}$

= 30 x 29 x 28 = 24 360

(On a simplifié les doubles termes au numérateur et au dénominateur.)

Autre exemple d'arrangement (permutation) avec le tiercé (course de chevaux) :
Combien de tiercé est-il possible d'obtenir avec une course de 10 chevaux ? (Nombre d'arrangements avec des chevaux numérotés de 1 à 10.)
Cela fait $\dfrac{10\,!}{7\,!}$ = 10 x 9 x 8 = 720 possibilités

3. **<u>On fait un tirage simultané</u>**, c'est-à-dire que l'on tire en même temps trois balles de l'urne sans remise.

Cela fait : $\dfrac{30 \text{ x } 29 \text{ x } 28}{3\,!} = \dfrac{2436}{3\,!}$
⇔ $A^3_{30} / 3\,!$
= 4 060

Dans le cas général on dit que C_n^p ou $\binom{n}{p}$ est **une combinaison** (ou coefficient binomial) de p éléments parmi n, ou encore le nombre de façons qu'il y a de choisir p objets parmi n **sans tenir compte de l'ordre**. On a $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ pour tout n≥p.
Remarque 1 : on voit parfois l'écriture $\binom{n}{p}$ pour C_n^p
Remarque 2 : si n<p alors $C_n^p = 0$

Autre exemple : A la fin de la course de chevaux, on décide de faire passer un contrôle anti-dopage à trois chevaux sur les dix. Combien cela fait-il de possibilités ?

Cela fait : $C^3_{10} = \dfrac{10\,!}{3\,!\ 7\,!}$

= 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x … / 3 x 2 x 1 x 7 x 6 x …

= 120

Dans le cas général on dit que n ! est une permutation de n objets ou encore le nombre de façons de ranger n objet dans un certain ordre. On a $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$
Remarque : 0 ! = 1 et 1 ! = 1

Si n est grand, on peut estimer n ! à l'aide de la formule de Stirling :

$n! = \frac{n^n}{e^n} \times \sqrt{2\pi \times n}$ (à utiliser rarement)

4. Propriétés importantes des combinaisons :

$C_n^0 = C_n^n = 1$
$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
$C_n^k = C_n^{n-k}$
$k \times C_n^k = n \times C_{n-1}^{k-1}$
Formule du triangle de Pascal : $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$
Formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$

Remarques :

- Pour $(a-b)^n$ Il suffit d'alterner + et – devant les coefficients en commençant par +.
- $\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k = 2^n$ Il suffit de remplacer dans la formule du binôme de Newton a=1 et b=1

Informations complémentaires :

- Le Triangle de Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

- Somme : $\sum_{k=1}^{4} 2k = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4$
- Produit : π (pareil que la somme, mais on fait un produit à la place d'une somme)

5. <u>EXERCICES D'APPLICATION :</u>

Exercice 1 : démontrer la formule du triangle de pascal (développer avec la formule des factorielles).

Exercice 2 :

• • •

• • •

• • •

Combien de triangles non-aplatis peut-on former à partir de ces neuf points ?

EXERCICES D'APPLICATION FAITS EN COURS :

Exercice 1 :

Afin de tester le sens chromatique (la façon de percevoir les couleurs) d'une personne daltonienne, on leur présente une série de six cartons dont 2 sont rouges et 4 sont verts. Les cartons d'une même couleur sont indiscernables.

Combien de séries différentes peut-on lui présenter ?

2 rouges

4 verts $= \frac{6\,!}{2\,!\;4\,!}$

= 15 possibilités

Exercice 2 :

Une direction marketing décide de mobiliser 4 ingénieurs et 3 gestionnaires sur un projet. En interne, 6 ingénieurs et 5 gestionnaires ont les compétences requises et sont volontaires. Sachant que l'un des ingénieurs et l'un des gestionnaires sont en conflit et qu'il n'est pas judicieux qu'ils travaillent ensemble, combien d'équipes de projets différentes et non conflictuelles peut-on former ?

On utilise la combinaison. $C^4{}_6$ = nb d'équipes possibles de 4 ingénieurs

$C^3{}_5$ = nb d'équipes possibles de 3 gestionnaires

$\Leftrightarrow C^4{}_6 \times C^3{}_5 = 15 \times 10 = 150$ équipes possibles en tout.

D'après un autre calcul (que je n'ai pas noté…) on peut former 60 équipes conflictuelles.

Donc 150 – 60 = 90

On peut former 90 équipes non-conflictuelles.

Exercice 3 :

Une boîte contient 7 vrais billets de montant différents et 6 faux billets également de montant différent. On tire, au hasard, successivement, et sans remise, 5 billets.
Combien de résultats amènent 4 vrais billets et 1 faux ?

A^4_7 x A^1_6 x 5 (car 5 emplacements possibles)
= 25 200 combinaisons possibles

Exercice 4 :
Il y a quelques années en France, les plaques d'immatriculation comportaient 4 chiffres, dont le premier était différent de 0, 2 lettres distinctes (et différentes de I et de O pour ne pas les confondre avec zéro et un) puis le numéro du département.
Combien cela représente-il de possibilités pour chaque département ?

Cela fait : 9 x 10 x 10 x 10 x 24 x 23 = 4 968 000 possibilités.

Exercice 5 :
On choisit 8 cartes d'un jeu de 32.

1) Combien de mains sont possibles ?
2) Combien de mains comporte une dame au moins ?
3) Combien de mains comportent au moins un cœur et une dame ?
4) Combien de mains ne contiennent que des cartes de deux couleurs (quatre couleurs : pique, trèfle, cœur et carreau) au plus ?

Réponse 1 : on tire 8 cartes parmi 32 cela fait donc :
$C^8_{32} = \frac{32!}{8!\ 24!} = 10\ 518\ 300$

Réponse 2 : nombre de mains sans dame : C^8_{28} = 3 108 105
Nombre de mains avec au moins une dame = 10 518 300 – 3 108 105
= 7 410 195

Réponse 3 : $C^8_{32} - C^8_{21}$ = 10 314 810
Dans le jeu il y a 4 dames et 8 cœurs
21 = 32 cartes – toutes les dames et tous les cœurs

Réponse 4 : on peut former C^8_{16} mains juste avec pique et trèfle.
Manière de choisir deux couleurs parmi 4 = C^2_4 = 6 manières différentes de choisir deux couleurs parmi 4.
C^8_{16} x C^4_2 – 8 = 77 212
Moins 8 = on enlève les mains que l'on a compté plusieurs fois.

II) théorie des ensembles

➢ Définition et propriétés des ensembles

Définition d'un ensemble : un ensemble est une collection (ou un groupement) d'éléments considérée dans sa totalité.

Notations :
- Les grandes lettres (A, B, C) sont réservées au nom des ensembles
- Les petites lettres (a, b, c) sont utilisées pour les éléments de l'ensemble

Notation d'ensemble : V = {a ; e ; i ; o ; …}

Types d'ensembles :
On distingue les ensembles **finis** (dont on peut répertorier les éléments) des ensembles **infinis** pour lesquels on ne peut que se référer à une propriété (par exemple : **{x | E(x)}** : ensemble de tous les éléments x qui possèdent la propriété E).

➢ Système complet d'événements

On dit qu'un système d'événements a_1, a_2, … a_n est complet si tous ces événements sont incompatibles 2 à 2 et que leur union recouvre toutes les issues possibles de l'expérience.

Définition d'une bijection : Construire une bijection entre un ensemble A et un ensemble B consiste à mettre en correspondance parfaite les éléments de A avec ceux de B, ce qui n'est possible que si A et B ont, au sens intuitif, « autant d'éléments l'un que l'autre ». Inversement, dire que deux ensembles finis ont le même nombre d'éléments (ou le même cardinal), revient à dire qu'il existe une bijection entre ces ensembles.
Synonymes : correspondance bijective, application bijective.

➢ Notion d'événement contraire :

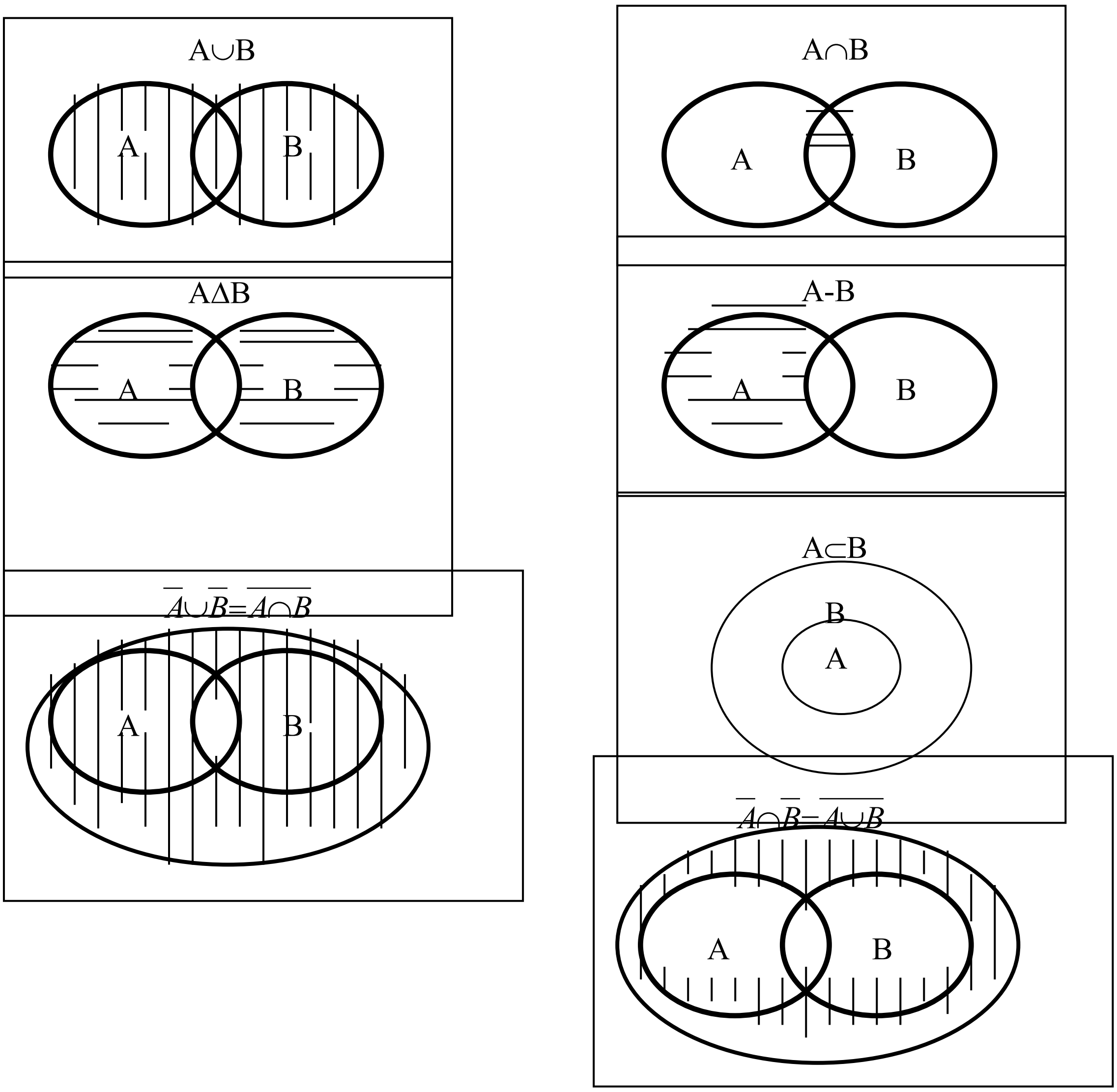
L'événement contraire à A est l'événement $\overline{A}$.
Exemple : si A : « être un garçon » alors $\overline{A}$: « être une fille ».
Remarque : $\overline{\overline{A}} = A$

Principales propriétés des ensembles :

$A \cup A = A \cap A = A$
$A \cup \emptyset = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$
Si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$ et $A \cap B = A$

$A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A = A \cap B + A \cap \overline{B}$
Les 2 formules de Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Représentation graphique des symboles usuels : inter $\cap$, union $\cup$, delta Δ, injection $\subset$



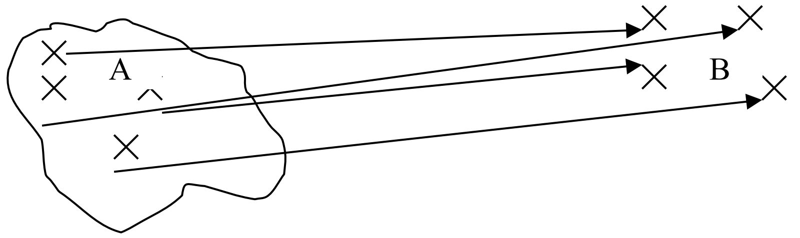
- **<u>Définition et propriétés des cardinaux</u>**

Définition d'un cardinal : Le cardinal d'un ensemble E représente son nombre d'éléments. On le note card(E). Dénombrer un ensemble fini E, c'est trouver son cardinal.

- **<u>Propriétés des cardinaux :</u>**

Card(∅) = 0

2 ensembles A et B ont le même cardinal : card(A) = card(B) s'il existe une bijection de A sur B (ou de B sur A)



S’il existe une injection de A dans B (ce que l’on note A⊂B) le cardinal d'un ensemble A est inférieur ou égal au cardinal d'un ensemble B, et on écrit card(A) ≤ card(B)

Si deux ensembles A et B sont disjoints (A∩B =∅) on dit que le cardinal de l'ensemble A∪B (réunion de A ou B) est la somme des cardinaux des ensembles A et B et on écrit : card(A∪B)= card(A) + card(B)

Si A et B sont disjoints alors Card (AUB) = card (A) + card (B)

Si A et B sont deux ensembles finis quelconques, alors A∪B est fini et :

card(A∪B) = card(A) + card(B) – card (A∩B)

Si E est fini et A⊂E (A inclus dans E) alors :

Card(C_E^A) = Card(E) – card(A)

(C_E^A désigne le complémentaire de A dans E)

Le cardinal de l'ensemble AxB (produit cartésien de A et B) est le produit des cardinaux des ensembles A et B et on écrit : card (AxB)= card(A) x card(B)

Généralisation de la propriété « d » à n ensembles finis : si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n ensembles finis deux à deux disjoints ($A_i \cap A_j$ = ensemble vide pour i ≠ j) alors $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ est fini et : Card($A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$) = $\sum Card(A_i)$

Généralisation de la propriété « e » à n ensembles finis quelconques (➔ <u>Formule de Poincaré</u> ou formule du crible) : si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n ensembles finis, alors $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ est fini et :

$$Card(A1\cup A2\cup\ldots\cup An)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i1<i2<\ldots<ik\le n} Card(Ai1\cap Ai2\cap\ldots\cap Aik)$$

Card (AUBUC) = Card(A) + Card(B) + Card (C) – Card(A∩B) – Card(A∩C) – Card(B∩C) + Card(A∩B∩C)

Généralisation de la propriété « g » à n ensembles finis :
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n ensembles finis, alors leur produit cartésien $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ est fini et :
$Card(A1 \times A2 \times \ldots \times An) = \prod_{i=1}^{n} Card(Ai)$=Card(A1)xCard(A2)xCard(A3)x…xCard(An)

EXERCICES D'APLICATION

Exercice 1 :
On place 4 pions numérotés de 1 à 4 sur 3 cases numérotées de 1 à 3. Chaque case peut contenir de 0 à 4 pions.
1) Dans combien de cas est-ce qu'une case au moins sera vide ?
2) Dans combien de cas aucune case ne sera vide ?

On note V_i l'événement *« La case n°i est vide »*
On note A l'événement *« au moins une case est vide »*

1) $Card(V_1 \cup V_2 \cup V_3) = Card(V_1) + Card(V_2) + Card(V_3) - Card(V_1 \cap V_2) - Card(V_1 \cap V_3) - Card(V_2 \cap V_3) + Card(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$

$Card(V_1) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16 = Card(V_2) = Card(V_3)$
$Card(V_1 \cap V_2) = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1^4 = 1 = Card(V_1 \cap V_3) = Card(V_2 \cap V_3)$
$Card(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = Card(\emptyset) = 0$
$= 16 + 16 + 16 - 1 - 1 - 1 = 45$

2) les elements de la q. 1 et 2 sont disjoints et forment ensemble l'univers des possibles (1 système complet d'evenement)
$Card(\Omega) = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$
Sur les 81 poss, il y en a 45 où une case au moins sera vide
donc $81 - 45 = 36$ poss. où aucune case sera vide.

Exercice 2 :
Ecrire à l'aide des opérations ensemblistes les événements suivants :
Au moins un des événements A, B ou C est réalisé.
$= A \cup B \cup C$

Un et un seul des événements A ou B se réalise.
$= A \cup B - A \cap B = A \Delta B$

A et B se réalisent mais pas C.
$= A \cap B \cap \overline{C}$